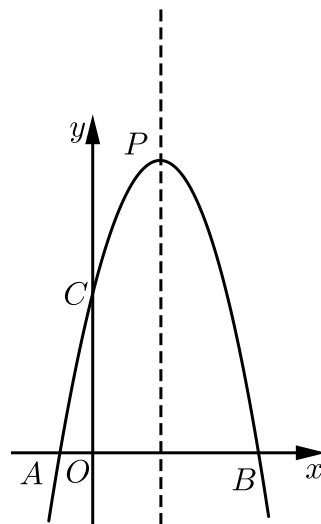


第2讲二次函数与四边形存在性（练习）

一、 平行四边形

1. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $P(2, 9)$ ，与 x 轴交于点 A, B ，与 y 轴交于点 $C(0, 5)$ 。



- (1) 求二次函数的解析式及点 A, B 的坐标。
(2) 设点 Q 在第一象限的抛物线上，若其关于原点的对称点 Q' 也在抛物线上，求点 Q 的坐标。
(3) 若点 M 在抛物线上，点 N 在抛物线的对称轴上，使得以 A, C, M, N 为顶点的四边形是平行四边形，且 AC 为其一边，求点 M, N 的坐标。

【答案】 (1) 二次函数的解析式为 $y = -(x - 2)^2 + 9 = -x^2 + 4x + 5$ ， $A(-1, 0)$ ， $B(5, 0)$ 。

(2) 点 Q 的坐标 $(\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$ 。

(3) 当点 $M(1, 8)$ 时， $N(2, 13)$ ，当 M 的坐标 $(3, 8)$ 时， $N(2, 3)$ 。

【解析】 (1) 设抛物线解析式为 $y = a(x - 2)^2 + 9$ ，

$\because$ 抛物线与 y 轴交于 $C(0, 5)$ ，

$$\therefore 4a + 9 = 5,$$

$$\therefore a = -1,$$

$$\therefore y = -(x - 2)^2 + 9 = -x^2 + 4x + 5,$$

$$\therefore A(-1, 0), B(5, 0).$$

(2) 设 Q 的坐标 $(m, -m^2 + 4m + 5)$ ， $0 < m < 5$ ，

$\because$ 点 Q' 与点 Q 关于原点对称，

$$\therefore Q'(-m, m^2 - 4m - 5),$$

$\therefore Q'$ 点也在抛物线上,

$$\therefore m^2 - 4m - 5 = -(-m)^2 + 4(-m) + 5,$$

$$\therefore m = -\sqrt{5} \text{ (舍)} \text{ 或 } m = \sqrt{5},$$

$\therefore$ 点 Q 的坐标 $(\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$.

(3) 如图, 过点 M 作 $MH \perp$ 对称轴, 垂足为点 H ,

$\therefore$ 四边形 $ACMN$ (或 $ACNM$) 是平行四边形,

$\therefore MN \parallel AC, MN = AC,$

$\therefore \triangle HMN \cong \triangle AOC,$

$\therefore MH = OA = 1,$

$\therefore M$ 点横坐标为 $x = 3$ 或 $x = 1,$

$\therefore M(1, 8), \text{ 或 } (3, 8),$

$\therefore AC^2 = OA^2 + OC^2 = 26,$

$\therefore MN^2 = 26,$

设点 N 的坐标为 $(2, t),$

①当点 $M(1, 8)$ 时,

$$(2 - 1)^2 + (t - 8)^2 = 26,$$

$t = 3 \text{ (舍)} \text{ 或 } t = 13,$

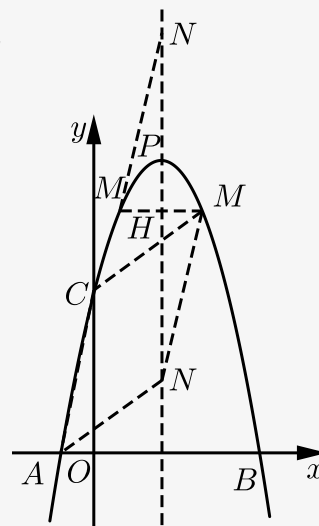
$\therefore N(2, 13),$

②当 M 的坐标 $(3, 8)$ 时,

$$(2 - 3)^2 + (t - 8)^2 = 26,$$

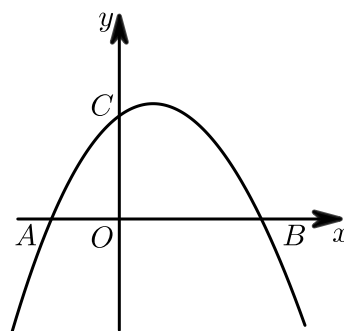
$t = 3 \text{ 或 } t = 13 \text{ (舍)},$

$\therefore N(2, 3).$



【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

2. 如图, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$ 与 x 轴相交于 A, B 两点, (点 A 在 B 点左侧) 与 y 轴交于点 C



- (1) 求 A, B 两点坐标 .
- (2) 连接 AC , 若点 P 在第一象限的抛物线上 , P 的横坐标为 t , 四边形 $ABPC$ 的面积为 S . 试用含 t 的式子表示 S , 并求 t 为何值时 , S 最大 .
- (3) 在 (2) 的基础上 , 若点 G, H 分别为抛物线及其对称轴上的点 , 点 G 的横坐标为 m , 点 H 的纵坐标为 n , 且使得以 A, G, H, P 四点构成的四边形为平行四边形 , 求满足条件的 m, n 的值 .

【答案】 (1) $A(-\sqrt{2}, 0), B(2\sqrt{2}, 0)$.

(2) $t = \sqrt{2}$.

(3) $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}, n = \frac{3}{4}$ 或 $m = \frac{5\sqrt{2}}{2}, n = -\frac{15}{4}$ 或 $m = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, n = \frac{1}{4}$.

【解析】 (1) 当 $y = 0$ 时 ,

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2 = 0 ,$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ 或 } x = 2\sqrt{2} ,$$

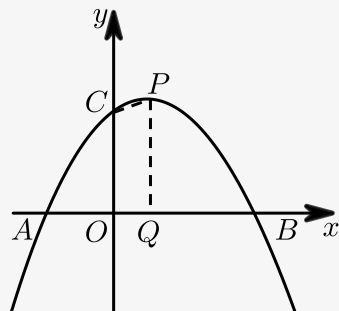
$$\therefore A(-\sqrt{2}, 0), B(2\sqrt{2}, 0) .$$

(2) 令 $x = 0$,

$$\therefore y = 2 ,$$

$$C(0, 2) ,$$

如图 , 作 $PQ \perp x$ 轴于 Q ,



$\therefore P$ 的横坐标为 t , 设 $P(t, p)$,

$$\therefore p = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t + 2 ,$$

$$PQ = p, BQ = 3\sqrt{2} - t, OQ = t ,$$

$$\therefore S = S_{\triangle ADC} + S_{\text{梯}OCPQ} + S_{\triangle PQB}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (2 + p)t + \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2} - t) \cdot p$$

$$= t + \sqrt{2} + \sqrt{2}p$$

$$= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t + 2 \right) + t + \sqrt{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(t - \sqrt{2})^2 + 4\sqrt{2} (0 < t < 2\sqrt{2}) ,$$

$\therefore t = \sqrt{2}$ 时, S 最大为 $4\sqrt{2}$.

(3) 由(2)知, $t = \sqrt{2}$,

$\therefore P(\sqrt{2}, 2)$,

$\therefore$ 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$ 对称轴 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

设 $G\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m + 2\right)$, $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, n\right)$,

以 A, G, H, P 构成平行四边形 $A(-\sqrt{2}, 0)$.

① 当 AP 和 HG 为对角线,

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2}(2 + 0) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}m^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m + 2 + n\right),$$

$$m = -\frac{\sqrt{2}}{2}, n = \frac{3}{4},$$

② 当 AG 和 PH 是对角线时,

$$\frac{1}{2}(m - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}m^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m + 2 + 0\right) = \frac{1}{2}(n + 2),$$

$$m = \frac{5\sqrt{2}}{2}, n = -\frac{15}{4}.$$

③ AH 和 PG 为对角线时, $\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}(m + \sqrt{2})$,

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}m^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m + 2 + 2\right) = \frac{1}{2}(m + 0),$$

$$m = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, n = \frac{1}{4},$$

$\therefore$ 综上所述, $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}, n = \frac{3}{4}$ 或 $m = \frac{5\sqrt{2}}{2}, n = -\frac{15}{4}$ 或 $m = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$

$$n = \frac{1}{4}.$$

【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

3. 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ (b, c 为常数) 与 y 轴相交于点 C , 经过点 C 作直线 $CD \parallel x$ 轴, 交抛物线于点 D , 将直线 CD 向上平移 t 个单位长度, 交抛物线于点 A 和 B (A 在 B 的左侧), 直线 AB 与抛物线的对称轴 l 交于点 E .

(1) 当 $b = -2, c = 1$ 时, 求抛物线顶点 P 的坐标.

(2) 若 $\angle ACB = 90^\circ$, 求 t 的值.

(3) 在(2)的条件下, 当以点 A, D, C, E 为顶点的四边形为平行四边形时, 求 b 的值.

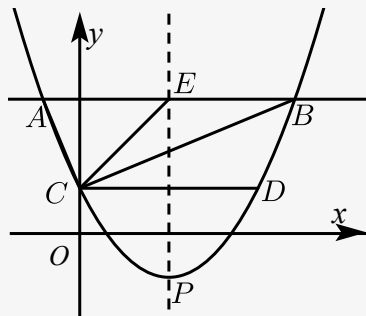
【答案】(1) (2, -1).

(2) 2.

(3) $b = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

【解析】(1) 把 $b = -2$, $c = 1$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$,
得到 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1$,
 $\therefore$ 抛物线的顶点 P 的坐标为 (2, -1).

(2) 如图,



$\because \angle ACB = 90^\circ$, $AE = EB$,

$\therefore CE = \frac{1}{2}AB$,

由 $\frac{1}{2}x^2 + bx + c = c + t$, 解得 $x = -b \pm \sqrt{b^2 + 2t}$,

$\therefore A(-b - \sqrt{b^2 + 2t}, c + t)$, $B(-b + \sqrt{b^2 + 2t}, c + t)$,

$\therefore AB = 2\sqrt{b^2 + 2t}$,

$\therefore E(-b, c + t)$, $C(0, c)$,

$\therefore CE = \sqrt{b^2 + t^2}$,

$\therefore \sqrt{b^2 + t^2} = \sqrt{b^2 + 2t}$,

解得 $t = 2$ 或 0 (舍弃),

$\therefore t = 2$.

(3) 由题意 $CD = AE$,

$\therefore A(-b - \sqrt{b^2 + 2t}, c + t)$, $E(-b, c + t)$, 且点 A 在点 E 的左侧,

$\therefore AE = \sqrt{b^2 + 2t}$,

$\therefore C(0, c)$, $D(-2b, c)$,

$\therefore CD = |-2b|$,

$\therefore \sqrt{b^2 + 2t} = |-2b|$,

$\therefore 3b^2 = 2t$,

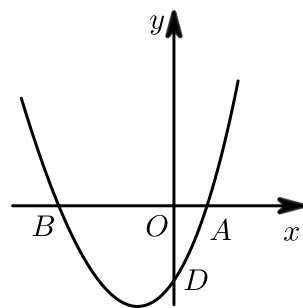
$\therefore t = 2$,

$$\therefore b = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

二、矩形

4. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(2, 0)$ 、 $B(-4, 0)$ ，与 y 轴于点 D 。



- (1) 求抛物线的解析式。
 (2) 连接 BD ，点 P 在抛物线的对称轴上，以 Q 为平面内一点，以点 P 、 B 、 D 、 Q 为顶点的四边形能否成为矩形？若能，请求出点 P 的坐标；若不能，请说明理由。

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ 。

(2) 能，满足条件的 P 的坐标为 $(-1, 3)$ 或 $(-1, -5)$ 或 $(-1, -2 + \sqrt{7})$ 或 $(-1, -2 - \sqrt{7})$ 。

【解析】(1) 由题意 $\begin{cases} 2 + 2b + c = 0 \\ 8 - 4b + c = 0 \end{cases}$ ，
 解得 $\begin{cases} b = 1 \\ c = -4 \end{cases}$ 。

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ 。

(2) 如图1中，当 BD 为矩形的边时，

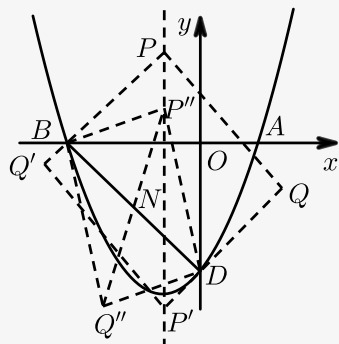


图 1

$\therefore$ 直线 BD 的解析式为 $y = -x - 4$,

$\therefore$ 直线 BP 的解析式为 $y = x + 4$, 直线 DP' 的解析式为 $y = x - 4$,

可得 $P(-1, 3)$, $P'(-1, -5)$.

当 BD 为矩形的对角线时, 设 $P(-1, m)$, BD 的中点 $N(-2, -2)$,

由 $BN = P'N$,

可得 $1^2 + (m + 2)^2 = (2\sqrt{2})^2$,

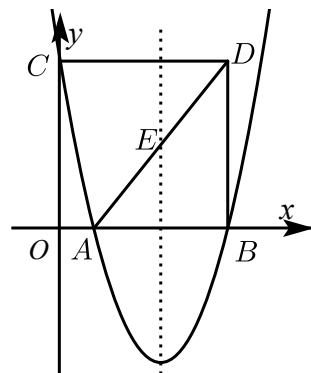
解得 $m = -2 + \sqrt{7}$ 或 $-2 - \sqrt{7}$,

$\therefore P'(-1, -2 + \sqrt{7})$ 或 $(-1, -2 - \sqrt{7})$.

综上所述, 满足条件的 P 的坐标为 $(-1, 3)$ 或 $(-1, -5)$ 或 $(-1, -2 + \sqrt{7})$ 或 $(-1, -2 - \sqrt{7})$.

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

5. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 O 是原点, 正方形 $OBDC$ 的顶点 B 在 x 轴的正半轴上, 顶点 C 在 y 的正半轴上, 点 D 的坐标是 $(5, 5)$, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 B 、 C 两点与 x 轴的另一个交点是点 A , 连接 AD .



- (1) 请直接写出抛物线的表达式.
- (2) 设抛物线的对称轴与直线 AD 相交于点 E , 求出点 E 的坐标.
- (3) 若点 M 是抛物线对称轴上一点, 点 N 是平面内一点, 是否存在以 A 、 D 、 M 、 N 为顶点的矩形, 若存在, 请直接写出 M 点的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = x^2 - 6x + 5$.

(2) $\left(3, \frac{5}{2}\right)$.

(3) 存在, 点 M 的坐标为 $\left(3, \frac{33}{5}\right)$, $\left(3, -\frac{8}{5}\right)$, $\left(3, \frac{5 - \sqrt{41}}{2}\right)$ 或 $\left(3, \frac{5 + \sqrt{41}}{2}\right)$.

【解析】(1) $\because$ 四边形 $OBDC$ 为正方形, 点 D 的坐标是 $(5, 5)$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(5, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, 5)$.

将 $B(5, 0)$ 、 $C(0, 5)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$, 得:

$$\begin{cases} 25 + 5b + c = 0 \\ c = 5 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b = -6 \\ c = 5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = x^2 - 6x + 5$.

(2) $\because$ 抛物线的表达式为 $y = x^2 - 6x + 5$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 3$.

当 $y = 0$ 时, 有 $x^2 - 6x + 5 = 0$,

解得: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 点 B 的坐标为 $(5, 0)$.

设直线 AD 的解析式为 $y = kx + a (k \neq 0)$,

将 $A(1, 0)$ 、 $D(5, 5)$ 代入 $y = kx + a$, 得:

$$\begin{cases} k + a = 0 \\ 5k + a = 5 \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} k = \frac{5}{4} \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AD 的解析式为 $y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4}$.

当 $x = 3$ 时, $y = \frac{5}{4} \times 3 - \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$.

(3) 设点 M 的坐标为 $(3, m)$,

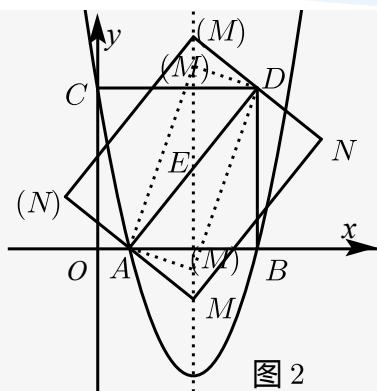
$\because$ 点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 点 D 的坐标为 $(5, 5)$,

$$\therefore AM = \sqrt{(3-1)^2 + (m-0)^2} = \sqrt{m^2 + 4},$$

$$AD = \sqrt{(5-1)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{41},$$

$$DM = \sqrt{(3-5)^2 + (m-5)^2} = \sqrt{m^2 - 10m + 29}.$$

分 AD 为边或 AD 为对角线两种情况考虑(如图2):



当 AD 为边时,有 $AD^2 + AM^2 = DM^2$ 或 $AD^2 + DM^2 = AM^2$,即

$$41 + m^2 + 4 = m^2 - 10m + 29 \text{ 或 } 41 + m^2 - 10m + 29 = m^2 + 4,$$

解得： $m_1 = -\frac{8}{5}$ ， $m_2 = \frac{33}{5}$ ，
 $\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(3, \frac{33}{5}\right)$ 或 $\left(3, -\frac{8}{5}\right)$ ；

当 AD 为对角线时, 有 $AM^2 + DM^2 = AD^2$, 即

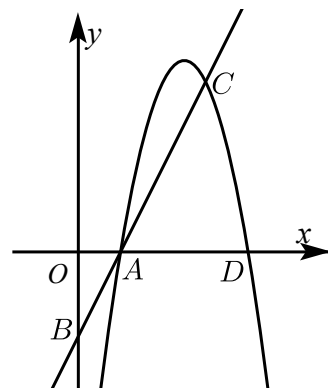
$$m^2 + 4 + m^2 - 10m + 29 = 41,$$

$$\therefore \text{点} M \text{ 的坐标为 } \begin{pmatrix} 2 \\ 3, \frac{5-\sqrt{41}}{2} \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} 2 \\ 3, \frac{5+\sqrt{41}}{2} \end{pmatrix}.$$

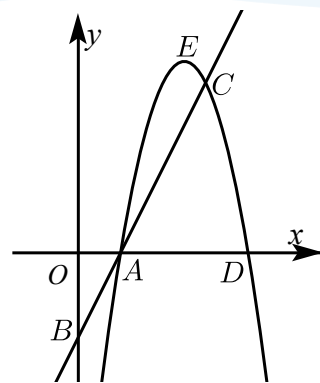
综上所述：存在以 A 、 D 、 M 、 N 为顶点的矩形，点的坐标为 $\left(3, \frac{33}{5}\right)$ ， $\left(3, -\frac{8}{5}\right)$ ， $\left(3, \frac{5-\sqrt{41}}{2}\right)$ 或 $\left(3, \frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)$ 。

【标注】【题型】 题型：二次函数与平行四边形

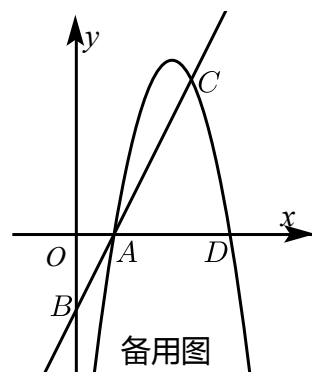
6. 如图, 已知直线 $l: y = 2x - 2$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B 两点, C 为 l 在一象限内的一点, 且 $AC = 2\sqrt{5}$, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ 过 A 、 C 两点, 且与 x 轴的另一交点为 D .



- (2) 如图若抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ 的顶点为 E , P 为直线 AC 上的一动点, 当 $|PD - PE|$ 值最大时, 求此时点 P 的坐标及 $|PD - PE|$ 的最大值.



- (3) 如图, 若点 M 为 x 轴上一点, 点 N 为平面内一点, 且满足以点 B 、 C 、 M 、 N 为顶点的四边形是矩形, 请直接写出点 N 的坐标.

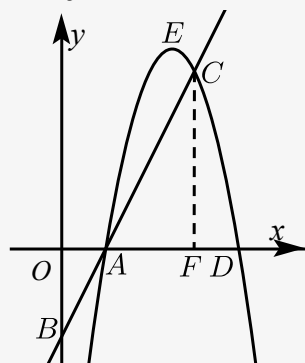


【答案】(1) $y = -2x^2 + 10x - 8$.

(2) $P\left(\frac{18}{5}, \frac{26}{5}\right)$, $|PD - PE|$ 的最大值为 $\frac{3}{10}\sqrt{170}$.

(3) $N_1(-1, 6)$, $N_2(8, -6)$, $N_3\left(\frac{3 - \sqrt{41}}{2}, 2\right)$, $N_4\left(\frac{3 + \sqrt{41}}{2}, 2\right)$.

【解析】(1) 因为 $y = 2x - 2$ 与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 两点,



所以 $A(1, 0)$ 、 $B(0, -2)$,

所以 $OA = 1$, $OB = 2$, $AB = \sqrt{5}$,

过点 C 作 $CF \perp x$ 轴于点 F .

$\triangle AOB \sim \triangle AFC$,

所以 $\frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{CF}{OB}$,

所以 $AF = 2$, $CF = 4$,

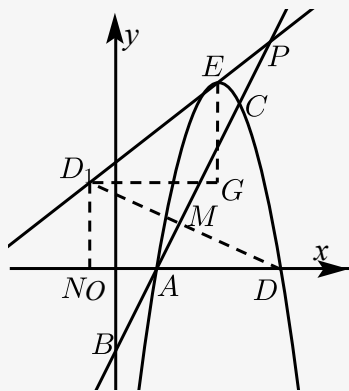
所以 $OF = 3$,

所以点 $C(3, 4)$.

将点 $A(1, 0)$ 、 $C(3, 4)$ 代入 $y = ax^2 + bx - 8$, 得 $a = -2$, $b = 10$,

所以抛物线的解析式为 $y = -2x^2 + 10x - 8$.

- (2) 作点关于直线 AC 的对称点 D_1 , 交直线 AC 于点 M , 作直线 D_1E 交直线 AC 于点 P , 此时 $|PD - PE|$ 的值最大 , $|PD - PE|$ 的值即 $|PD_1 - PE|$ 的值 , 也就是线段 D_1E 的长 .



因为 D 是抛物线与 x 轴的交点 ,

所以点 $D(4, 0)$,

所以 $AD = 3$,

因为 $\triangle AOB \sim \triangle AMD$,

所以 $\frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AO} = \frac{MD}{OB}$,

$MD = \frac{6}{5}\sqrt{5}$, $DD_1 = \frac{12}{5}\sqrt{5}$,

$\triangle D_1ND \sim \triangle AMD$,

所以 $\frac{D_1D}{AD} = \frac{D_1N}{AM} = \frac{ND}{MD}$,

所以 $D_1N = \frac{12}{5}$, $DN = \frac{24}{5}$.

又因为 $DO = 4$,

所以 $ON = \frac{4}{5}$,

所以 $D_1\left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

又因为抛物线的顶点 $E\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$,

所以直线 D_1E 的解析式为 $y = \frac{7}{11}x + \frac{32}{11}$,

解方程组 $\begin{cases} y = \frac{7}{11}x + \frac{32}{11} \\ y = 2x - 2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{18}{5} \\ y = \frac{26}{5} \end{cases}$

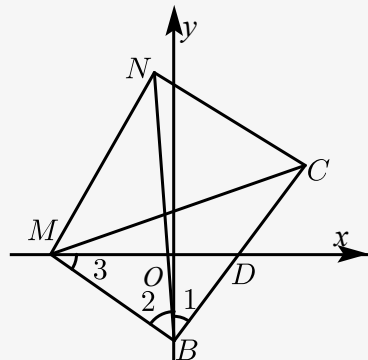
所以点 $P\left(\frac{18}{5}, \frac{26}{5}\right)$.

过点 D_1 作 $D_1G \perp y$ 轴, 过点 E 作 $EG \perp x$ 轴, $D_1G = \frac{33}{10}$, $EG = \frac{21}{10}$,

$$\text{所以 } D_1E = \sqrt{\left(\frac{33}{10}\right)^2 + \left(\frac{21}{10}\right)^2} = \frac{3}{10}\sqrt{170},$$

即当点 $P\left(\frac{18}{5}, \frac{26}{5}\right)$ 时, $|PD - PE|$ 的最大值为 $\frac{3}{10}\sqrt{170}$,

(3) 如图:



当 $y = 0$ 时, $2x - 2 = 0$, 解得 $x = 1$, 即 $D(1, 0)$,

$\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$,

又 $\because \angle BOD = \angle MOB$,

$\therefore \triangle BOD \sim \triangle MOB$,

$$\therefore \frac{MO}{BO} = \frac{BO}{OD},$$

解得 $MO = 4$, 即 $M(-4, 0)$,

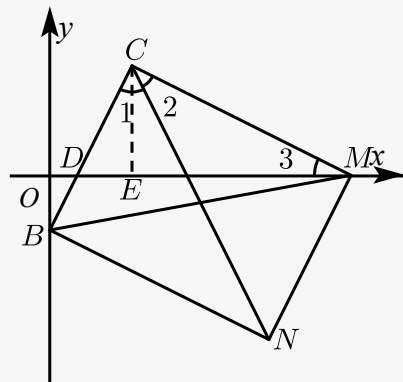
由对角线平分, 得

$$\frac{x_N + x_B}{2} = \frac{x_M + x_C}{2}, \text{ 即 } \frac{x_N + 0}{2} = \frac{-4 + 3}{2}, \text{ 即 } x_N = -1,$$

$$\frac{y_N + y_B}{2} = \frac{y_M + y_C}{2}, \text{ 即 } \frac{y_N + (-2)}{2} = \frac{0 + 4}{2}, \text{ 即 } y_N = 6,$$

N 点坐标为 $(-1, 6)$;

如图:



作 $CE \perp OM$ 于 E , $OE = 3$, $CE = 4$.

当 $y = 0$ 时, $2x - 2 = 0$, 解得 $x = 1$, 即 $D(1, 0)$,

$DE = OE - OD = 3 - 1 = 2$.

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\text{又} \because \angle DEC = \angle CEM,$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle CEM, \therefore \frac{DE}{CE} = \frac{CE}{EM},$$

$$\text{解得 } ME = 8, \text{ 即 } M(11, 0),$$

由矩形的对角线平分, 得

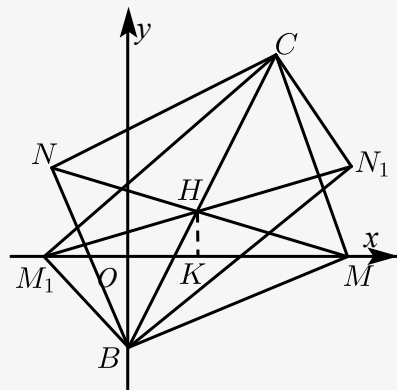
$$\frac{x_N + x_B}{2} = \frac{x_M + x_C}{2}, \text{ 即 } \frac{x_N + x_C}{2} = \frac{x_B + x_M}{2}, \frac{x_N + 3}{2} = \frac{0 + 11}{2}, \text{ 即}$$

$$x_N = 8,$$

$$\frac{y_N + y_C}{2} = \frac{y_B + y_M}{2}, \text{ 即 } \frac{y_N + 4}{2} = \frac{-2 + 0}{2}, \text{ 即 } y_N = -6,$$

N 点坐标为 $(8, -6)$.

如图, 当 BC 为对角线时, 有两种情形, 设 BC 的中点为 H , 作 $HK \perp x$ 轴于 K ,



$$\text{易知 } H\left(\frac{3}{2}, 1\right), HM = HM_1 = \frac{1}{2}BC = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore KM = KM_1 = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{41}}{2},$$

$$\therefore M\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}, 0\right), M_1\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}, 0\right),$$

$$\because HN = HM, HN_1 = HM_1,$$

$$\therefore N\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}, 2\right), N_1\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}, 2\right),$$

综上所述: 若点 M 为 x 轴上一点, 点 N 为平面内一点, 且满足以点 B 、 C 、 M 、 N

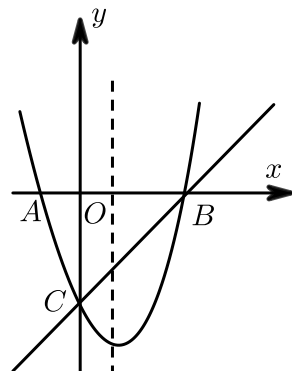
为顶点的四边形是矩形, 点 N 的坐标 $(8, -6)$ 或 $(-1, 6)$ 或 $\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}, 2\right)$ 或

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}, 2\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

三、菱形

7. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B ，与 y 轴交于点 C ，作直线 BC ，点 B 的坐标为 $(6, 0)$ ，点 C 的坐标为 $(0, -6)$ 。



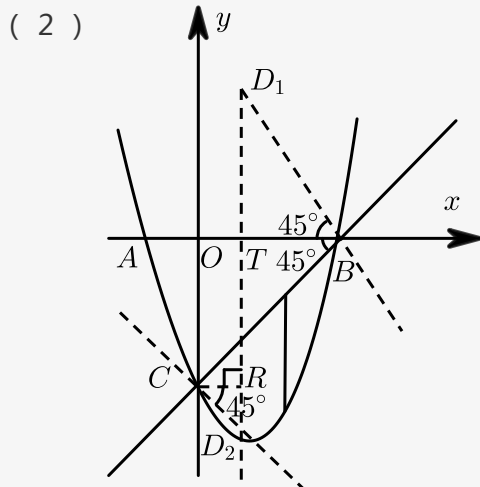
- (1) 求抛物线的解析式并写出其对称轴。
- (2) D 为抛物线对称轴上一点，当 $\triangle BCD$ 是以 BC 为直角边的直角三角形时，求 D 点坐标。
- (3) 若 E 为 y 轴上且位于点 C 下方的一点， P 为直线 BC 上的一点，在第四象限的抛物线上是否存在一点 Q ，使以 C 、 E 、 P 、 Q 为顶点的四边形是菱形，若存在，请求出 Q 点的横坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$ ，对称轴为： $x = 2$ 。

(2) $(2, 4)$ 或 $(2, -8)$ 。

(3) 存在，点 Q 的横坐标为 $6 - 2\sqrt{2}$ 或 2 。

【解析】 (1) 将 $(6, 0)$ ， $(0, -6)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ ，
 得 $\begin{cases} 18 + 6b + c = 0 \\ c = -6 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} b = -2 \\ c = -6 \end{cases}$ ，
 $\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$ ，对称轴为直线 $x = 2$ 。



$\triangle BCD$ 是以 BC 为直角边的直角三角形,

$$\textcircled{1} \angle CBD = 90^\circ \text{时},$$

$$\because B(6, 0), C(0, -6),$$

$$\therefore \angle CBO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA = 45^\circ,$$

$$\therefore BT = D_1T = 4,$$

$$\therefore D_1(2, 4);$$

$$\textcircled{2} \angle DCB = 90^\circ \text{时},$$

$$\text{同理} \angle RCD_2 = 45^\circ, \therefore CR = RD_2 = 2,$$

$$\therefore D_2(2, -8),$$

综上, 点 D 的坐标为 $(2, 4)$ 或 $(2, -8)$.

(3) 当 CE 为菱形的一条边时,

根据题意, 得 $PQ \parallel CE$, 即 $PQ \parallel y$ 轴, 且 $PQ = PC$,

易得直线 BC 的解析式为 $y = x - 6$,

$$\text{设} P(a, a - 6), \text{则} Q\left(a, \frac{1}{2}a^2 - 2a - 6\right) (a > 0),$$

$$\therefore PC = \sqrt{2}a, PQ = a - 6 - \frac{1}{2}a^2 + 2a + 6 = -\frac{1}{2}a^2 + 3a,$$

$$\therefore \sqrt{2}a = -\frac{1}{2}a^2 + 3a,$$

$$\text{解得} a = 6 - 2\sqrt{2} \text{或} a = 0 \text{ (舍去)},$$

$$\text{故点} Q \text{的坐标为} (6 - 2\sqrt{2}, 4 - 8\sqrt{2}).$$

当 CE 为菱形的对角线时, $PQ \perp CE$, 即 $PQ \parallel x$ 轴,

$$\text{设} P(a, a - 6), \text{则} Q(m, a - 6),$$

$$\text{其中} a - 6 = \frac{1}{2}m^2 - 2m - 6,$$

$$\text{则} PC = -\sqrt{2}a, CQ^2 = m^2 + a^2,$$

$$\text{由题意得} CQ = CP,$$

$$\therefore (-\sqrt{2}a)^2 = m^2 + a^2,$$

$$\therefore m^2 = a^2,$$

$$\text{解得} m = -a,$$

$$\therefore a - 6 = \frac{1}{2}a^2 + 2a - 6,$$

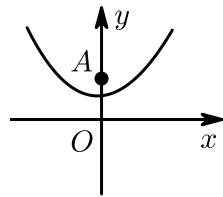
$$\text{解得} a = -2 \text{或} a = 0 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore Q(2, -8).$$

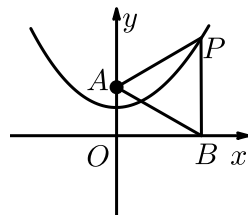
综上, 点 Q 的横坐标为 $6 - 2\sqrt{2}$ 或 2 .

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

8. 已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ (如图所示) .



- (1) 填空：抛物线的顶点坐标是 (_____ , _____) , 对称轴是 _____ .
 (2) 已知 y 轴上一点 $A(0, 2)$, 点 P 在抛物线上 , 过点 P 作 $PB \perp x$ 轴 , 垂足为 B . 若 $\triangle PAB$ 是等边三角形 , 求点 P 的坐标 .



- (3) 在 (2) 的条件下 , 点 M 在直线 AP 上 . 在平面内是否存在点 N , 使四边形 $OAMN$ 为菱形 ?
 若存在 , 直接写出所有满足条件的点 N 的坐标 ; 若不存在 , 请说明理由 .

【答案】 (1) $0; 1; y$ 轴 或 $x = 0$

(2) 点 P 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 4)$ 或 $(-2\sqrt{3}, 4)$.

(3) 存在点 $N(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(\sqrt{3}, -1)$, 使得四边形 $OAMN$ 是菱形 .

【解析】 (1) 顶点坐标是 $(0, 1)$, 对称轴是 y 轴 (或 $x = 0$) .

(2) $\because \triangle PAB$ 是等边三角形 ,

$$\therefore \angle ABO = \angle 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ .$$

$$\therefore AB = 2OA = 4 .$$

$$\therefore PB = 4 . \text{ 把 } y = 4 \text{ 代入 } y = \frac{1}{4}x^2 + 1 , \text{ 得 } x = \pm 2\sqrt{3} .$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (2\sqrt{3}, 4) \text{ 或 } (-2\sqrt{3}, 4) .$$

(3) 设存在点 M 使得 $OAMN$ 是菱形 ,

$$\therefore \angle OAP > 90^\circ ,$$

$\therefore OA$ 不可能为菱形的对角线 , 只能为菱形的边 . 若点 P 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 4)$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(0, 2)$,

设线段 AP 所在直线的解析式为 $y = kx + b$, 则

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}k + b = 4 \\ b = 2 \end{cases} ,$$

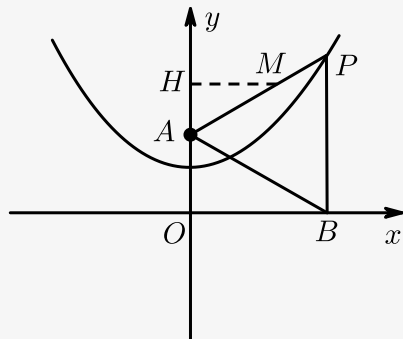
$$\text{解得 : } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 2 \end{cases} .$$

∴ AP 所在直线的解析式为： $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$.

∴ 点 M 在直线 AP 上 ,

∴ 设点 M 的坐标为： $\left(m, \frac{\sqrt{3}}{3}m + 2\right)$.

如图 , 作 $MH \perp y$ 轴于点 H , 则 $MH = m$,



$$AN = OH - OA = \frac{\sqrt{3}}{3}m + 2 - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}m .$$

∴ OA 为菱形的边 ,

∴ $AM = AO = 2$.

∴ 在 $\text{Rt} \triangle AMH$ 中 , $AH^2 + MH^2 = AM^2$,

$$\text{即：} m^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}m\right)^2 = 2^2 , \text{解得：} m = \pm\sqrt{3} .$$

∴ $M(\sqrt{3}, 3)$ 或 $(-\sqrt{3}, 1)$.

当 $M(\sqrt{3}, 3)$ 时 , $N(\sqrt{3}, 1)$;

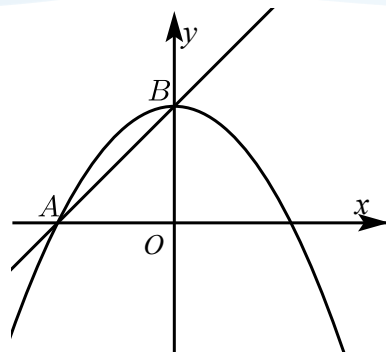
当 $M(-\sqrt{3}, 1)$ 时 , $N(-\sqrt{3}, -1)$.

若点 P 的坐标为 $(-2\sqrt{3}, 4)$, 同理可得 N 的坐标为 $(-\sqrt{3}, 1)$ 或 $(\sqrt{3}, -1)$.

综上所述 , 存在点 $N(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(\sqrt{3}, -1)$, 使得四边形 $OAMN$ 是菱形 .

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

9. 如图 , 在平面直角坐标系中 , 直线 AB 和抛物线交于点 $A(-4, 0)$, $B(0, 4)$, 且点 B 是抛物线的顶点 .



- (1) 求直线 AB 和抛物线的解析式.
- (2) 点 P 是直线上方抛物线上的一点, 求当 $\triangle PAB$ 面积最大时点 P 的坐标.
- (3) M 是直线 AB 上一动点, 在平面直角坐标系内是否存在点 N , 使以 O 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 请求出点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 直线 AB 的解析式为 $y = x + 4$, 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

(2) $P(-2, 3)$.

(3) $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 或 $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ 或 $(-4, 4)$ 或 $(2, 2)$.

【解析】 (1) 设直线的解析式为 $y = kx + b$,

$$\because \text{将 } A(-4, 0), B(0, 4) \text{ 代入得: } \begin{cases} -4k + b = 0 \\ b = 4 \end{cases},$$

解得 $k = 1, b = 4$,

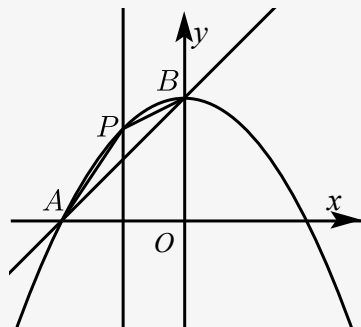
$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = x + 4$,

设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + 4$,

$$\because \text{将 } A(-4, 0) \text{ 代入得: } 16a + 4 = 0, \text{ 解得 } a = -\frac{1}{4},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

(2) 如图所示, 过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴, 交 AB 于点 Q .



设点 P 的坐标为 $(a, -\frac{1}{4}a^2 + 4)$,

则点 Q 的坐标为 $(a, a + 4)$,

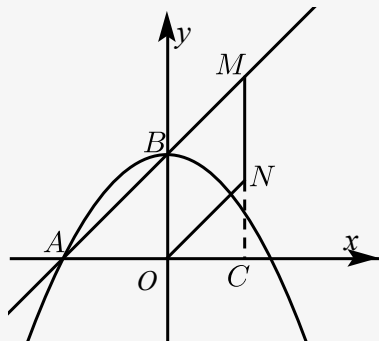
$$\text{则 } PQ = -\frac{1}{4}a^2 + 4 - (a + 4) = -\frac{1}{4}a^2 - a,$$

$\therefore S_{\triangle ABP}$ 的面积

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}PQ \cdot (x_B - x_A) = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(-\frac{1}{4}a^2 - a \right) \\
 &= -\frac{1}{2}a^2 - 2a = -\frac{1}{2}(a+2)^2 + 2,
 \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $a = -2$ 时 $\triangle ABP$ 的面积最大, 此时 $P(-2, 3)$.

(3) 如图所示: 延长 MN 交 x 轴与点 C ,



$\therefore MN \parallel OB, OB \perp OC,$

$\therefore MN \perp OC,$

$\therefore OA = OB, \angle AOB = 90^\circ,$

$\therefore \angle BAO = 45^\circ,$

$\therefore ON \parallel AB,$

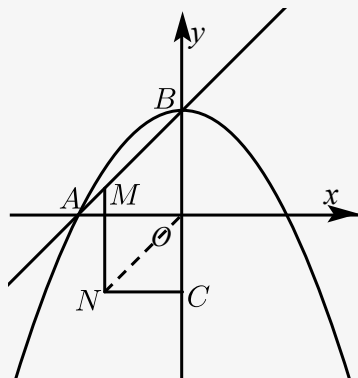
$\therefore \angle NOC = 45^\circ,$

$\therefore OC = ON \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$

$NC = ON \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$,

如图所示: 过点 N 作 $NC \perp y$ 轴, 垂足为 C ,



$\therefore OA = OB, \angle AOB = 90^\circ,$

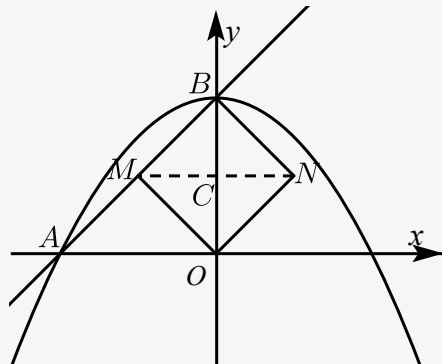
$\therefore \angle OBA = 45^\circ,$

$\therefore ON \parallel AB,$

$\therefore \angle NOC = 45^\circ,$

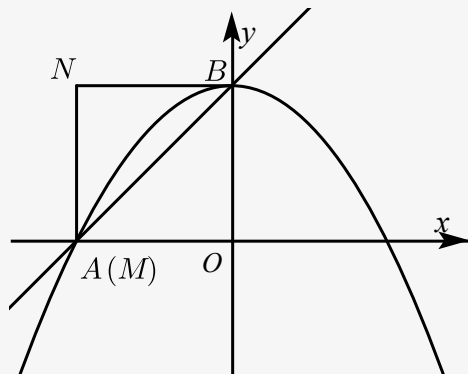
$$\begin{aligned}\therefore OC &= ON \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}, \\ NC &= ON \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}, \\ \therefore \text{点} N \text{的坐标为} &(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}),\end{aligned}$$

如图所示：连接 MN 交 y 轴与点 C ，



$$\begin{aligned}\therefore \text{四边形} BNOM &\text{为菱形}, OB = 4, \\ \therefore BC &= OC = 2, MC = CN, MN \perp OB, \\ \therefore \text{点的纵坐标为} &2, \\ \therefore \text{将} y = 2 &\text{代入} y = x + 4 \text{得: } x + 4 = 2, \text{解得: } x = -2, \\ \therefore \text{点} M &\text{的坐标为} (-2, 2), \\ \therefore \text{点} N &\text{的坐标为} (2, 2),\end{aligned}$$

如图所示：



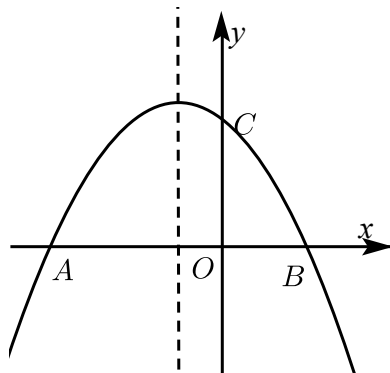
$$\begin{aligned}\therefore \text{四边形} OBNM &\text{为菱形}, \\ \therefore \angle NBM &= \angle ABO = 45^\circ, \\ \therefore \text{四边形} OBNM &\text{为正方形}, \\ \therefore \text{点} N &\text{的坐标为} (-4, 4),\end{aligned}$$

综上所述点 N 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 或 $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ 或 $(-4, 4)$ 或 $(2, 2)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与特殊平行四边形

四、正方形

10. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + 2ax + c$ 交 x 轴于 A, B 两点，交 y 轴于点 $C(0, 3)$ ， $\tan \angle OAC = \frac{3}{4}$ 。



- (1) 求抛物线的解析式。
 (2) 点 M 是抛物线上任意一点，连接 CM ，以 CM 为边作正方形 $CMEF$ ，是否存在点 M 使点 E 恰好落在对称轴上？若存在，请求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $y = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$ 。

(2) 存在， $M_1(-4, 0)$ ， $M_2(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$ ， $M_3(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$ ， $M_4(2, 0)$ 。

【解析】 (1) 略。

(2) 设 $M(m, -\frac{3}{8}m^2 - \frac{3}{4}m + 3)$ ， $E(-1, n)$ ，

过点 M 作 $MH \perp y$ 轴于 H 交对称轴于点 G ，

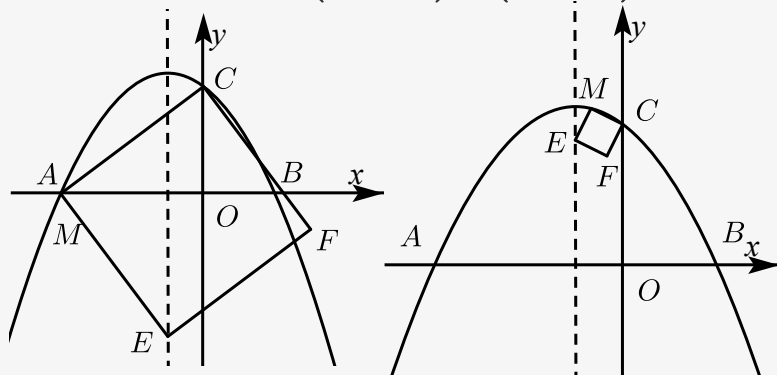
则 $\triangle EGM \cong \triangle MHC$ ，

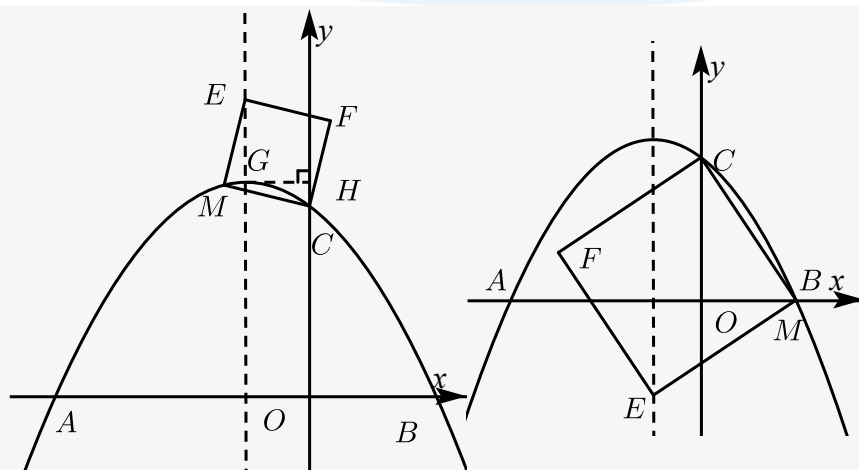
则 $MG = HC$ ，

$$\text{即 } |-1 - m| = \left| -\frac{3}{8}m^2 - \frac{3}{4}m + 3 - 3 \right|,$$

解得 $m = 2, -\frac{4}{3}, -4$ 或 $-\frac{2}{3}$ 。

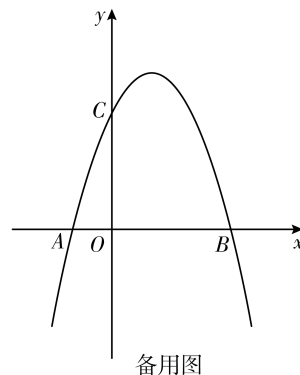
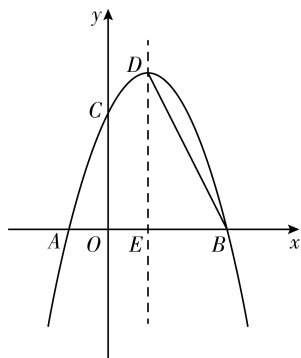
点 M 的坐标为 $(-4, 0)$ ， $(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$ ， $(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$ 或 $(2, 0)$ 。





【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

11. 如图，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B ，与 y 轴交于点 C ，点 B 坐标为 $(6, 0)$ ，点 C 坐标为 $(0, 6)$ ，点 D 是抛物线的顶点，过点 D 作 x 轴的垂线，垂足为 E ，连接 BD 。



- (1) 求抛物线的解析式及点 D 的坐标。
 (2) 点 F 是抛物线上的动点，当 $\angle FBA = \angle BDE$ 时，求点 F 的坐标。
 (3) 若点 P 是 x 轴上方抛物线上的动点，以 PB 为边作正方形 $PBFG$ ，随着点 P 的运动，正方形的大小、位置也随着改变，当顶点 F 或 G 恰好落在 y 轴上时，请直接写出点 P 的横坐标。

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8$ ， $D(2, 8)$ 。

(2) $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$ 或 $\left(-3, -\frac{9}{2}\right)$ 。

(3) $1 + \sqrt{13}$ 或 4 或 0 或 $3 - \sqrt{21}$ 。

【解析】(1) 把点 B 坐标为 $(6, 0)$ ，点 C 坐标为 $(0, 6)$ 代入抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 得：

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \times 36 + 6b + c = 0 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} b = 2 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8$$

$$\therefore D(2, 8).$$

(2) 如图1,

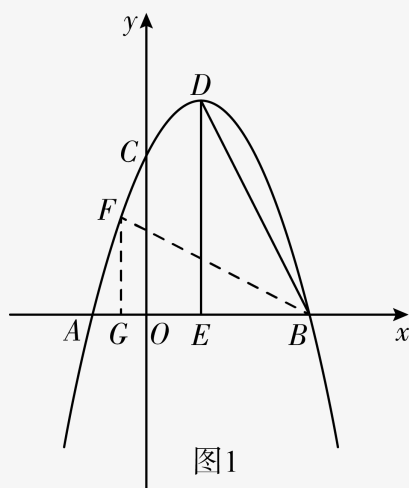


图1

过F作 $FG \perp x$ 轴于点G,

$$\text{设 } F\left(x, -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6\right), \text{ 则 } FG = \left| -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \right|,$$

$$\because \angle FBA = \angle BDE, \angle FGB = \angle BED = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FBG \sim \triangle BDE,$$

$$\therefore \frac{FG}{BG} = \frac{BE}{DE},$$

$$\because B(6, 0), D(2, 8),$$

$$\therefore E(2, 0), BE = 4, DE = 8, OB = 6,$$

$$\therefore BG = 6 - x,$$

$$\therefore \frac{\left| -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \right|}{6 - x} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\text{当点 } F \text{ 在 } x \text{ 轴上方时, 有 } 6 - x = 2\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6\right),$$

$$\text{解得 } x = -1 \text{ 或 } x = 6 \text{ (舍去)},$$

$$\text{此时 } F \text{ 点的坐标为 } \left(-1, \frac{7}{2}\right);$$

$$\text{当点 } F \text{ 在 } x \text{ 轴下方时, 有 } 6 - x = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6\right),$$

$$\text{解得 } x = -3 \text{ 或 } x = 6 \text{ (舍去)},$$

$$\text{此时 } F \text{ 点的坐标为 } \left(-3, -\frac{9}{2}\right);$$

$$\text{综上所述 } F \text{ 点的坐标为 } \left(-1, \frac{7}{2}\right) \text{ 或 } \left(-3, -\frac{9}{2}\right).$$

$$(3) \text{ 设 } P\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6\right),$$

有三种情况:

①如图2, 当G在y轴上时, 过P作 $PQ \perp y$ 轴于Q, 作 $PM \perp x$ 轴于M,

∵ 四边形 $PBFG$ 是正方形 ,

∴ $PG = PB$,

∵ $\angle PQG = \angle PMB = 90^\circ$, $\angle QPG = \angle MPB$,

∴ $\triangle PQG \cong \triangle PMB$,

∴ $PQ = PM$,

即 $m = -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6$,

解得 : $m_1 = 1 + \sqrt{13}$, $m_2 = 1 - \sqrt{13}$ (舍) ,

∴ P 的横坐标为 $1 + \sqrt{13}$,

② 当 F 在 y 轴上时 , 如图3 , 过 P 作 $PM \perp x$ 轴于 M ,

同理得 : $\triangle PMB \cong \triangle BOF$,

∴ $OB = PM = 6$,

即 $-\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6 = 6$,

$m_1 = 0$ (舍) , $m_2 = 4$,

∴ P 的横坐标为 4 ,

③ 当 F 在 y 轴上时 , 如图4 , 此时 P 与 C 重合 ,

此时 P 的横坐标为 0 ,

综上所述 , 点 P 的横坐标为 $1 + \sqrt{13}$ 或 4 或 0 .

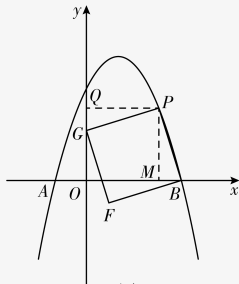


图2

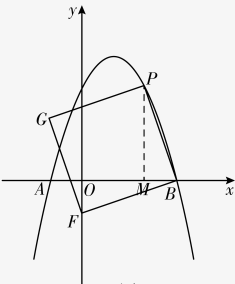


图3

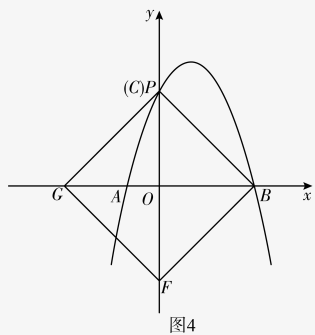
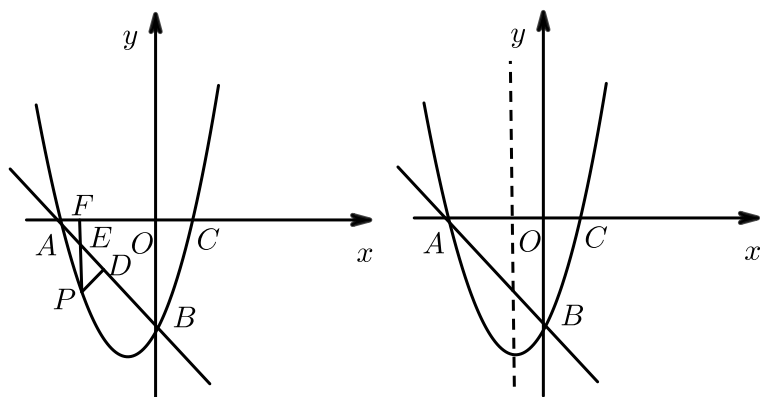


图4

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

12. 如图 , 在平面直角坐标系中 , 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A , $C(1, 0)$, 与 y 轴交于点 $B(0, -3)$, 点 P 是直线 AB 下方的抛物线上一动点 , 过点 P 作 x 轴的垂线 , 垂足为点 F , 交直线 AB 于

点 E ，作 $PD \perp AB$ 于点 D 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 当 $\triangle PDE$ 面积最大时，求出点 P 的坐标。
- (3) 连接 AP ，以 AP 为边在其右侧作正方形 $APMN$ ，随着点 P 的运动，正方形的大小、位置也随之改变。则当顶点 M 或 N 恰好落在抛物线的对称轴上时，求出点 P 的坐标。

【答案】 (1) 抛物线的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$ 。

(2) 点 $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ 时， $\triangle PDE$ 的面积最大。

(3) 当顶点 M 恰好落在抛物线对称轴上时，点 P 坐标为 $\left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right)$ ，
当顶点 N 恰好落在抛物线对称轴上时，点 P 的坐标为 $(-\sqrt{2} - 1, -2)$ 。

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $B(0, -3)$ ， $C(1, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} c = -3 \\ 1 + b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

所以，抛物线的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$ 。

(2) $\because$ 把 $y = 0$ 代入解析式可得： $x_1 = 1$ ， $x_2 = -3$ ，

$$\therefore A(-3, 0),$$

$$\therefore B(0, 3),$$

$$\therefore OA = OB = 3,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \angle BAO = 45^\circ.$$

$$\because PF \perp x\text{轴},$$

$$\therefore \angle AEF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\text{又} \because PD \perp AB,$$

$\therefore \triangle PDE$ 是等腰直角三角形，

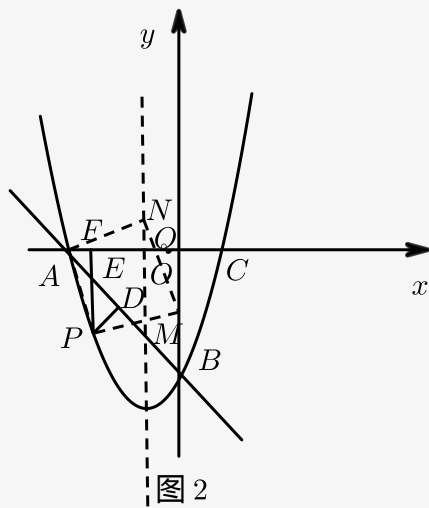
$$\text{解的 } n_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \text{ (舍去)}, n_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2},$$

$$1 + n = \frac{1 - \sqrt{17}}{2},$$

所以, 点 P 的坐标为 $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$.

(ii) 如图2, 点 N 在对称轴上时, 设抛物线对称轴与 x 轴交于点 Q ,

$$\because \angle PAF + \angle FPA = 90^\circ, \angle PAF + \angle QAN = 90^\circ,$$



$$\therefore \angle FPA = \angle QAN,$$

又 $\because \angle PFA = \angle AQN = 90^\circ$, $PA = AN$,

$$\therefore \triangle APF \cong \triangle NAQ,$$

$$\therefore PF = AQ,$$

设点 P 坐标为 $P(x, x^2 + 2x - 3)$ ，

则有 $x^2 + 2x - 3 = 1 - 3 = -2$,

解得 $x = \sqrt{2} - 1$ (不合题意, 舍去) 或 $x = -\sqrt{2} - 1$,

此时点 P 坐标为 $(-\sqrt{2}-1, -2)$.

综上所述，当顶点 M 恰好落在抛物线对称轴上时，点 P 坐标为

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right),$$

当顶点 N 恰好落在抛物线对称轴上时, 点 P 的坐标为 $(-\sqrt{2}-1, -2)$.

【标注】 **【知识点】** 二次函数与平行四边形